

# Chapitre 2 : Géométrie repérée

On se place dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  du plan.

## I. Rappels sur les équations de droites

Définitions :

Deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont dit **colinéaires** s'il existe un nombre réel  $k$  tel que

$$\vec{u} = k \vec{v}$$

On appelle **déterminant** de  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  le nombre  $\det(\vec{u}; \vec{v}) = xy' - yx'$

Propriété (critère de colinéarité) :

$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  sont colinéaires si et seulement si  $\det(\vec{u}; \vec{v}) = 0$  c'est-à-dire si et seulement si  $xy' - yx' = 0$

Exemple :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} 6 \\ -\frac{9}{2} \end{pmatrix} = -4 \times -\frac{9}{2} - 3 \times 6$$
$$= 18 - 18$$
$$= 0$$

donc  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires

$$\vec{v} = -1,5 \vec{u}$$

Théorème et définition :

Toute droite  $(d)$  admet une équation de la forme  $ax + by + c = 0$  avec  $(a; b) \neq (0; 0)$ .

Un vecteur directeur de  $(d)$  est  $\vec{u}(-b; a)$ .

Cette équation est appelée **équation cartésienne** de la droite  $(d)$ .

Exemple :

Déterminer le vecteur directeur de la droite  $(d)$  d'équation  $3x - 3y + 2 = 0$

$$a = 3$$

$$b = -3$$

$$\vec{u} = (-b; a)$$
$$= (3; 3) \text{ est directeur de } (d)$$

Méthode : Déterminer une équation de droite à partir d'un point et d'un vecteur directeur

On considère un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  du plan.

1) Déterminer une équation cartésienne de la droite  $d$  passant par le point  $A(3; 1)$  et de vecteur directeur  $\vec{u}(-1; 5)$ .

2) Déterminer une équation cartésienne de la droite  $d'$  passant par les points  $B(5; 3)$  et  $C(1; -3)$ .

1) Soit un point  $M(x; y)$  de la droite  $d$ .

$$M(x; y) \in d \Leftrightarrow \vec{AM} \begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} \\ \text{sont colinéaires}$$

$$\Leftrightarrow 5(x-3) + y - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x - 15 + y - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x + y - 16 = 0$$

$$\vec{u}(-1; 5) \quad 5x + y + c = 0$$

$$a = 5$$

$$b = 1$$

$$5 \times 3 + 1 + c = 0$$

$$15 + 1 + c = 0$$

$$16 + c = 0$$

$$c = -16$$

$$d : 5x + y - 16 = 0$$

$$2) \vec{CB} \begin{pmatrix} 5-1 \\ 3-(-3) \end{pmatrix}$$

$$\vec{CB} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad 6x + 4y - c = 0$$

$$a = 6$$

$$b = 4$$

$$6 \times 5 + 4 \times 3 - c = 0$$

$$30 + 12 - c = 0$$

$$36 - c = 0$$

$$c = -36$$

$$d' : 6x + 4y - 36 = 0$$

$$M(x; y) \in d' \Leftrightarrow \vec{BM} \begin{pmatrix} x-5 \\ y-3 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{BC} \begin{pmatrix} 1-5 \\ -3-3 \end{pmatrix}$$

sont colinéaires

$$\Leftrightarrow 4(y-3) - 6(x-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4y - 12 - 6x + 30 = 0$$

$$\Leftrightarrow -6x + 4y + 18 = 0$$

## II. Rappels sur les systèmes de deux équations à deux inconnues

### 1) Méthode de substitution

Méthode : Résoudre un système d'équations par la méthode de substitution

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5,60 \\ x + 3y = 4,20 \end{cases}$$

A noter : Ici, la méthode de substitution se prête bien à la résolution du système car une équation contient une inconnue facile à isoler :  $x$  dans la 2<sup>e</sup> équation

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5,60 \\ x + 3y = 4,20 \end{cases} \quad (\Rightarrow) \begin{cases} 3(4,20 - 3y) + 2y = 5,60 \\ x = 4,20 - 3y \end{cases}$$

$$(\Rightarrow) \begin{cases} 12,60 - 9y + 2y = 5,60 \\ x = 4,20 - 3y \end{cases}$$

$$(\Rightarrow) \begin{cases} 12,60 - 7y = 5,60 \\ x = 4,20 - 3y \end{cases}$$

$$(\Rightarrow) \begin{cases} -7y = 5,60 - 12,60 \\ x = 4,20 - 3y \end{cases}$$

$$(\Rightarrow) \begin{cases} -7y = -7 \\ x = 4,20 - 3y \end{cases}$$

$$(\Rightarrow) \begin{cases} y = 1 \\ x = 4,20 - 3 \end{cases}$$

$$(\Rightarrow) \begin{cases} y = 1 \\ x = 1,20 \end{cases}$$

## 2) Méthode des combinaisons linéaires

Méthode : Résoudre un système d'équations par la méthode des combinaisons linéaires

Résoudre le système suivant : 
$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 5x + 3y = 2 \end{cases}$$

A noter : Ici, la méthode de substitution ne se prête pas à la résolution du système car en isolant une inconnue, on ramène les équations à des coefficients rationnels. Ce qui compliquerait considérablement les calculs.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 15x - 10y = 25 \quad (\times 5) \\ 15x + 9y = 6 \quad (\times 3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -19y = 19 & \text{ligne 1 - ligne 2} \\ 15x + 9y = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ 15x - 9 = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ 15x = 15 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Remarque : (interprétation graphique)

Résoudre un système de deux équations à deux inconnues c'est déterminer les coordonnées du point d'intersection éventuel entre deux droites.

Plusieurs cas possibles :

- Une solution au système, les droites sont sécantes en 1 point.
- Une infinité de solutions au système, les deux droites sont confondues.
- Pas de solutions au système, les deux droites parallèles non confondues.